Séquence 5

Les vecteurs

Sommaire

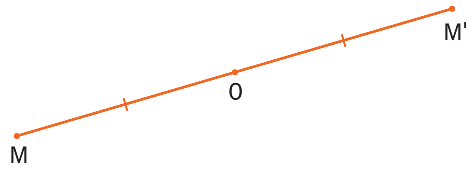
1 Prérequis

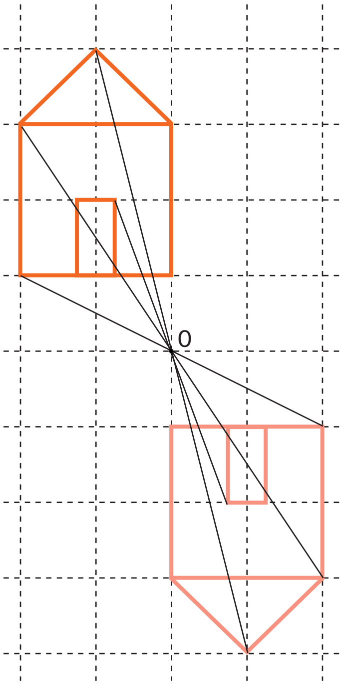
A Symétrie centrale

❶ Définition

Définition

Soit O un point du plan. La symétrie centrale de centre O est la transformation du plan qui associe à tout point M du plan, le point M' tel que O soit le milieu de [MM'].





❷ Propriétés

Se souvenir

Les symétries centrales transforment une droite en une droite parallèle.

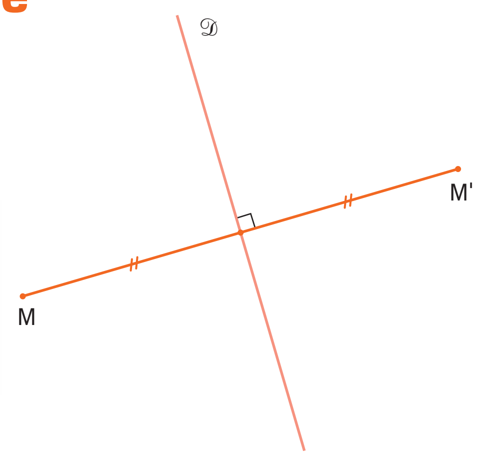
Les symétries centrales sont des transformations qui conservent les longueurs et les angles.

B Symétrie axiale

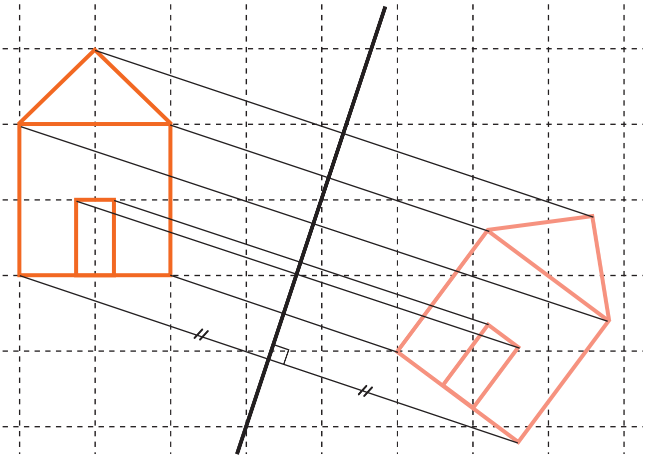
1 Définition

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. La symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}$ est la transformation du plan qui associe à tout point M du plan, le point M' tel que la droite $\mathcal{D}$ soit la médiatrice de [MM'].



2 Propriétés



Se souvenir

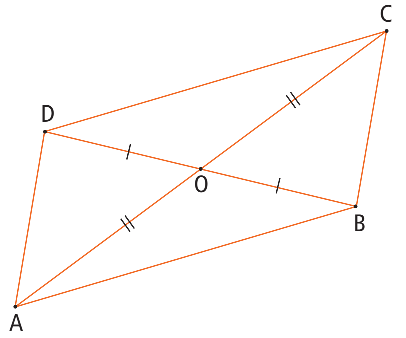
Les symétries axiales sont des transformations qui conservent les longueurs et les angles.

C Les parallélogrammes

1 Définition

Un parallélogramme ABCD est un quadrilatère non croisé qui admet un centre de symétrie, c'est-à-dire tel qu'il existe un point O centre d'une symétrie transformant l'ensemble {A, B, C, D} formé des quatre points A, B, C et D en lui-même. On montre, alors que par cette symétrie, A a forcément pour image C et B a forcément pour image D.

> **Se souvenir**
>
> Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en un point O milieu de ces deux segments.



Commentaire Le point O est alors le centre de la symétrie qui transforme A, B, C et D en, respectivement C, D, A et B. On l´appelle le centre du parallélogramme.

La symétrie centrale transformant une droite en une droite qui lui est parallèle, les côtés opposés d´un parallélogramme sont parallèles.

La symétrie centrale conservant les longueurs, les côtés opposés d´un parallélogramme sont égaux.

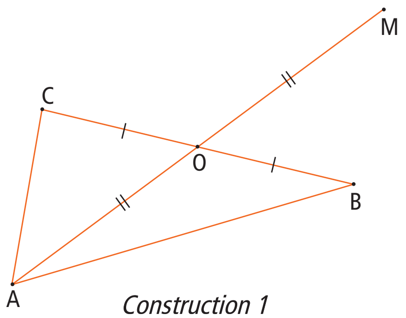
2 Propriétés caractéristiques

> **Propriétés**
>
> - **Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme.**
> - **Si un quadrilatère non croisé a deux côtés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.**
> - **Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur alors c'est un parallélogramme.**

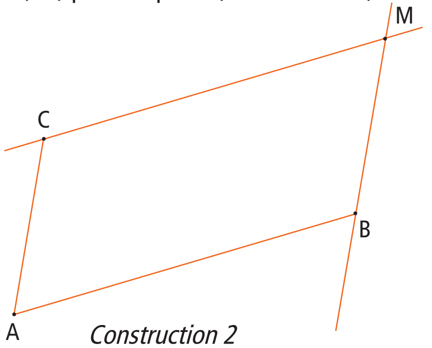
Commentaire Si ABC sont 3 points du plan, il existe un point M (et un seul) tel que ABMC soit un parallélogramme.

(ABMC est un parallélogramme si et seulement si M est le symétrique de A par rapport à la symétrie de centre O milieu de [BC]. Cette remarque nous permet de construire M à partir de A, B et C (construction 1).

On peut aussi construire M en remarquant qu'il est à l'intersection de la parallèle à (AB) passant par C et de la parallèle à (AC) passant par B (construction 2).



Construction 1



Construction 2

2 Notion de vecteur

A Activités

❶ Déplacements gourmands sur un quadrillage

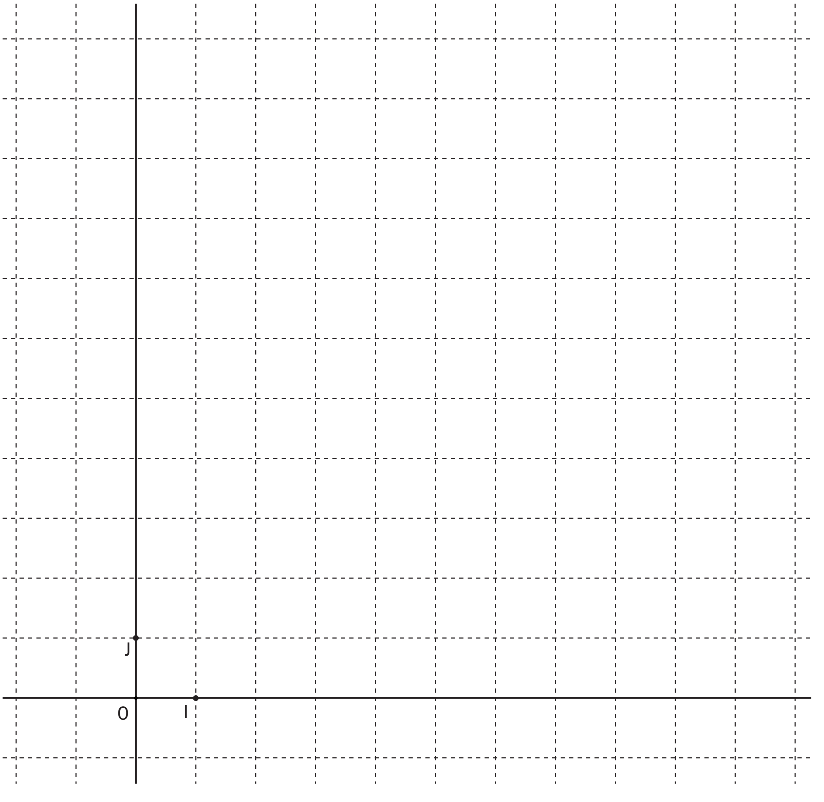
Erin et Samuel jouent au jeu suivant. Deux paquets de petits bonbons sont posés sur la table. Chacun des paquets contient 10 bonbons (et ne peut en contenir plus). A tour de rôle, ils ont le choix entre les trois actions suivantes.

1. Prendre 1 bonbon d'un paquet et 3 bonbons de l'autre et les manger.
2. Prendre 1 bonbon d'un paquet (et aucun bonbon de l'autre) et le manger.
3. Prendre 1 bonbon d'un paquet, ne pas le manger mais le placer dans l'autre paquet.

En procédant de la sorte, ils se lancent un défi : celui qui mangera le dernier bonbon gagnera.

On considère un repère (O, I, J). A chacune des étapes précédentes, on associe le point M $(a\,;\,b)$ où a est le nombre de bonbons manquant pour remplir le 1er paquet et b le nombre de bonbons manquant pour remplir le 2^{e} paquet.

La situation de départ correspond donc à O (0 ; 0).



1 Placer les points A, B et C correspondant respectivement aux situations suivantes.

a) Au total, il y a 8 bonbons en moins dans le 1er paquet et 2 bonbons en moins dans l'autre (A).

b) Il reste 4 bonbons dans chacun des deux paquets (B).

c) Les deux paquets sont vides (C).

2 Samuel vient de manger, sa position est décrite par le point A. Erin joue. La nouvelle situation correspond à un point N. Donner toutes les positions possibles pour N dans les cas suivants. Placer ces points.

a) Erin a choisi la 1re action.

b) Erin a choisi la 2e action.

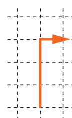
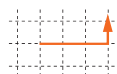
c) Erin a choisi la 3e action.

3 Erin commence à jouer. Son père a expliqué à Samuel que si, à chaque coup, il faisait en sorte que la position correspondante à la situation après avoir joué ait pour abscisse et pour ordonnée un nombre pair alors il était sûr de gagner (Essayez !).

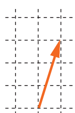
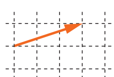
Au 1er coup, Erin se place en (1 ; 3). Quelles sont les possibilités pour Samuel, s'il suit les conseils de son père ?

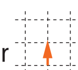
Synthèse

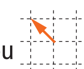
A lire après avoir traité l'activité

On peut matérialiser la 1re action par  ou  qui représentent des déplacements sur le quadrillage. Chacun de ces déplacements peut être caractérisé par des coordonnées ((1 ; 3) ou (3 ; 1)).

Nous appellerons ces déplacements **translations** et nous les caractériserons par un **vecteur.**

 ou 

De même, la 2e action est matérialisée par  (0 ; 1) ou  (1 ; 0).

La 3e action est matérialisée par  (1 ; –1) ou  (–1 ; 1).

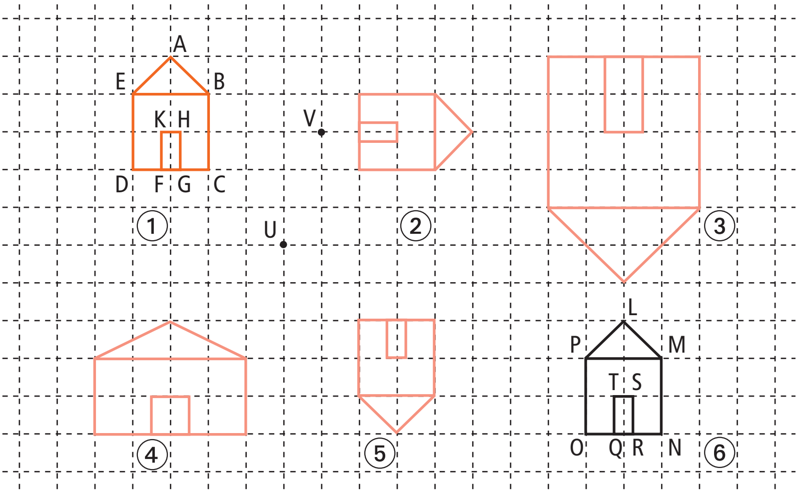
2 Translations sur une feuille

À l'aide d'un logiciel de dessin, Jean a représenté une maison (de sommets A, BCDEFGHK sur le dessin ci-dessous) qu'il a insérée dans un document ouvert avec son traitement de texte.

Il peut déplacer la maison à l'aide des flèches du clavier. Cliquer ⇒ déplace la figure d'un carreau vers la droite, cliquer ⇑ déplace la figure d'un carreau vers le haut…

On a représenté son document ci-dessous.

Par exemple, pour déplacer le dessin de telle sorte que A soit en U, il peut cliquer 3 fois sur $\Rightarrow$ et 5 fois sur $\Downarrow$.



On appelle translations, les déplacements possibles.

1. Quelles sont parmi, les dessins 2, 3, 4, 5 et 6 ceux que l'on peut obtenir par translation (*donc en utilisant uniquement les flèches du clavier)*?

2. Parmi les translations décrites ci-dessous, quelles sont celles qui permettent d'obtenir le dessin 6 à partir du dessin 1 ?

– Translation 12 $\Rightarrow$, 7 $\Downarrow$ (a)

– Translation 12 $\Leftarrow$, 7 $\Uparrow$ (b)

– Translation qui envoie A en L, B en M, C en N, D en O et E en P. (c)

– Translation qui envoie A sur L (d)

– Translation qui envoie C en N (e)

– Translation qui envoie C en O. (f)

À retenir

Pour définir une translation, il suffit de se donner un point A et son image B. En effet, il existe une unique translation transformant A en B. La translation (c) n'est autre que la translation (d). Cette translation est aussi la translation associée au couple (12 ; -7) (nous définirons ce couple comme étant les coordonnées du vecteur de la translation).

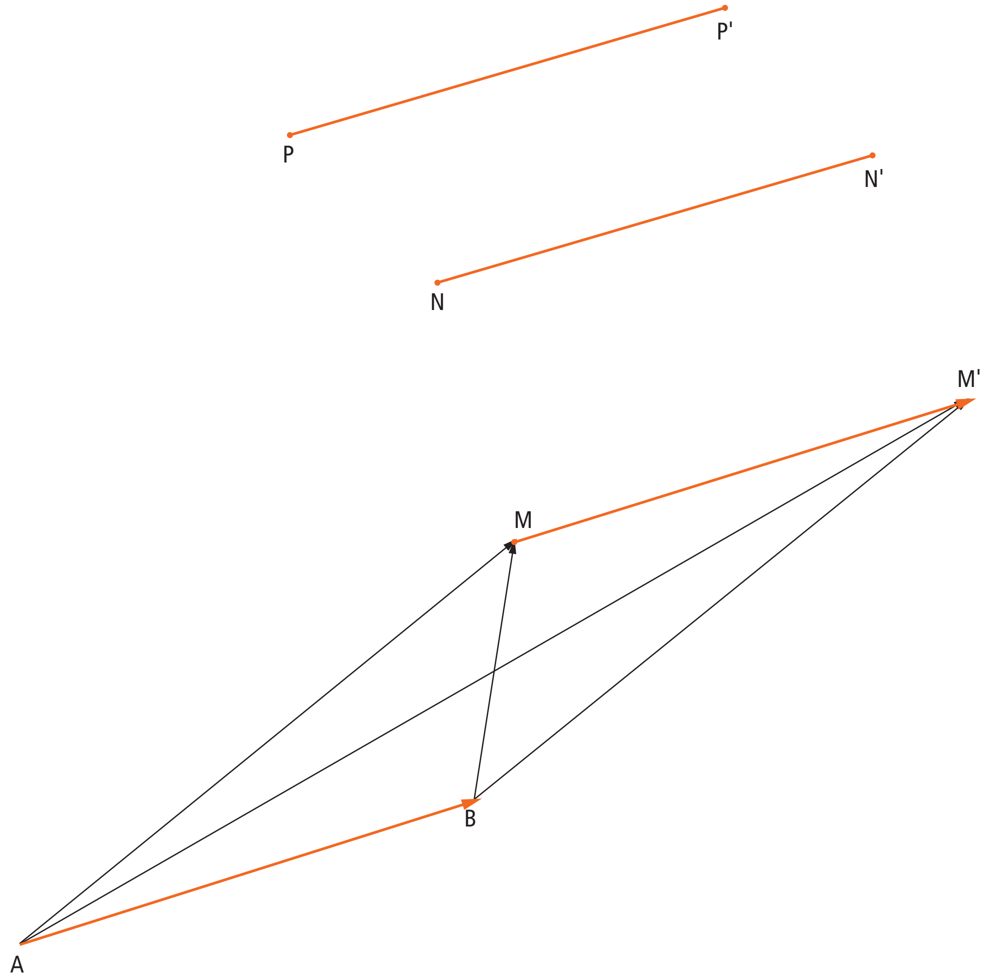
B Cours

1 Translation et vecteurs

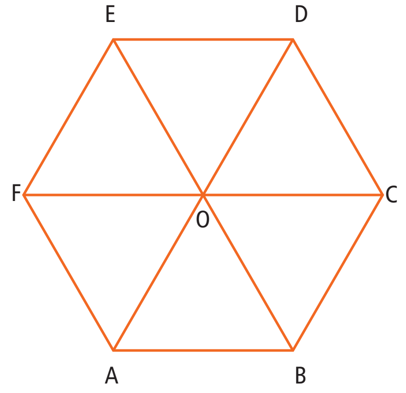
Définition

Soient A et B deux points du plan.

La translation qui transforme A en B est la transformation qui à un point M associe l'unique point M' tel que [AM'] et [BM] aient le même milieu (si M est différent de A, cela revient à dire que ABM'M est un parallélogramme éventuellement aplati).



Exemple 1 *Sur la figure ci-dessous, OABC, OBCD, OCDE, ODEF et OEFA sont des parallélogrammes. Compléter.*



❶ *La translation qui transforme A en B transforme*

a) F en…..

b) O en….

c) ….. en D

❷ *La translation qui transforme A en…. transforme B en D.*

❸ *La translation qui transforme F en D et la translation qui transforme…. en…. sont la même transformation.*

Réponses

❶ La translation qui transforme A en B transforme

a) F en O car ABOF est un parallélogramme.

b) O en C car ABCO est un parallélogramme.

c) E en D car ABDE est un parallélogramme. (en effet, on AB=ED (=OC) et (AB)//(ED) (//(OC)) ce qui prouve que ABDE est un parallélogramme).

❷ La translation qui transforme A en E transforme B en D car ABDE est un parallélogramme.

❸ La translation qui transforme F en D et la translation qui transforme A en C sont la même transformation car ACDF est un parallélogramme (bien sûr pour cette dernière question, on pouvait aussi répondre : « La translation qui transforme F en D et la translation qui transforme F en D sont la même transformation »).

Commentaire Si ABCD est un parallélogramme, la translation qui transforme A en B, transforme D en C (autrement dit la translation qui transforme A en B et la translation qui transforme D en C désignent la même transformation du plan).

Définition

La translation qui transforme A en B est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice Ci-dessous quelques réponses d'élèves à la question : « Qu'est-ce qu'un vecteur ? »

Quelles sont les réponses correctes ?

« On peut le voir comme une translation.»

« Par exemple, 3 carreaux vers la gauche et 2 carreaux vers le haut est un vecteur.»

« Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le segment que l'on oriente de A vers B. »

« Un déplacement. »

Solution

Bonne réponse	Mauvaise réponse
▶ « On peut le voir comme une translation. » ▶ « Par exemple, 3 carreaux vers la gauche et 2 carreaux vers le haut est un vecteur. » ▶ « Un déplacement. » (même si le terme n'est pas très précis).	▶ « Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le segment que l'on oriente de A vers B. »

Conclusion

On retiendra qu'un vecteur c'est

- une direction (celle d'une droite (AB), par exemple)
- un sens (de A vers B, par exemple)
- une longueur (celle du segment $[AB]$, par exemple)

2 Égalités de vecteurs

Commentaire

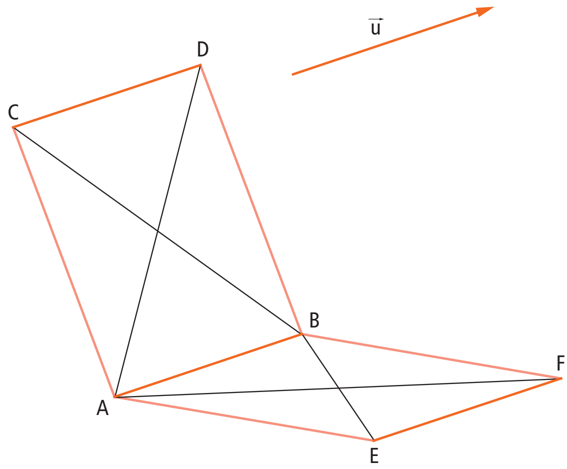
Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie donc que la translation qui transforme A en B transforme C en D, c'est-à-dire que les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

Définition

Soient A, B, C et D quatre points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

Exemple

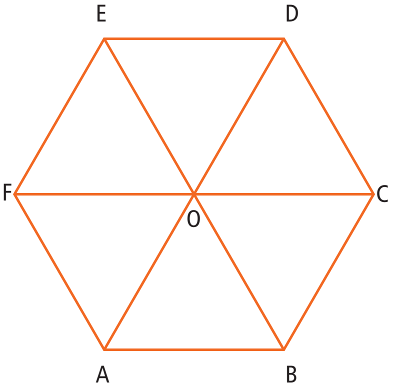
Sur le dessin ci-dessous, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ désignent le même vecteur (que l'on a, ici, noté $\vec{u}$).



Propriété : Soient A, B, C et D quatre points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Démonstration On a, en effet : les segments [AD] et [BC] ont même milieu si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Exemple 2 *Reprenons la figure de l'exemple 1. Compléter les égalités vectorielles suivantes.*



❶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F...} = \overrightarrow{...C}$.

❷ $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{...C}$.

❶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC}$ car ABOF et ABCO sont des parallélogrammes.

❷ $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AC}$ car FDCA est un parallélogramme.

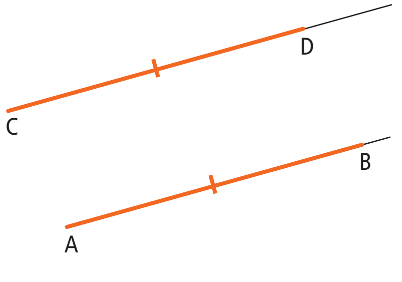
Définition

Soit A un point du plan. La translation qui transforme A en A transforme tout point B en lui-même B. On appelle vecteur nul et on note $\vec{0}$ le vecteur associé à cette translation. On a donc, pour tout point M du plan : $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{MM}$.

Propriété : Si A, B et C sont 3 points du plan, il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$.

Démonstration On a l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$ si et seulement si la translation qui transforme A en B, transforme C en M. Autrement dit, il y a un unique point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$ et ce point est l'image de C par la translation qui transforme A en B.

Commentaire Considérons un vecteur non nul $\vec{u}$ et deux points A et B du plan tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Soient C et D deux points distincts du plan.



On admet que si [AB] et [CD] ont même direction (c'est-à-dire : (AB)//(CD)) et même sens et que, de plus, les longueurs AB et CD sont égales alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

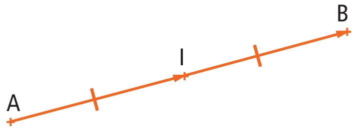
Ainsi, un vecteur non nul est défini par

- Une direction (ici, celle de (AB)) ;
- Un sens (ici, de A vers B)
- Une longueur (ici, AB) que l'on appelle norme du vecteur.

Propriété (admise) :

Cas particuliers

- **Soient A, B et I trois points du plan.**
  I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
- **Soient A, B et C trois points du plan.**
  $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ **si et seulement si B=C.**



Un peu de logique

Si on note *P* « I est le milieu de [AB] » et *Q* « $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ », la propriété s'énonce : « *P* si et seulement si *Q* ».

Cette proposition est équivalente à (« Si *P* alors *Q* » et « si *Q* alors *P* »).

Le 1er point de la propriété précédente signifie donc :

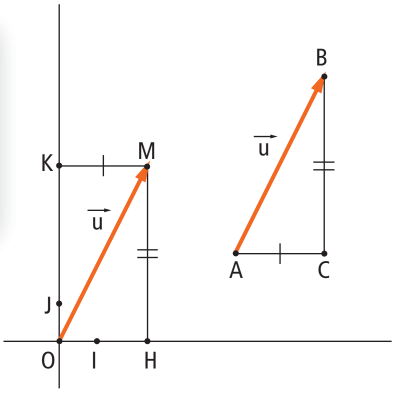
Si I est le milieu de [AB] alors $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ et si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ alors I est le milieu de [AB].

3 Coordonnées d'un vecteur

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ **.**

Propriété : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ **sont :** $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$ **où** $A\left(x_A;y_A\right)$ **et** $B\left(x_B;y_B\right)$.



Remarque

En particulier : $\vec{0}(0;0)$.

Démonstration

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées du point M tels que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire le point M tels que les segments [AM] et [OB] aient le même milieu.

Notons M $(x\,;y)$.

Le milieu de [AM] a pour abscisse : $\dfrac{x_A + x}{2}$ et pour ordonnée : $\dfrac{y_A + y}{2}$;

Le milieu de [OB] a pour abscisse : $\dfrac{0 + x_B}{2}$ et pour ordonnée : $\dfrac{0 + y_B}{2}$.

On a donc les égalités : $\dfrac{x_A + x}{2} = \dfrac{x_B}{2}$ et $\dfrac{y_A + y}{2} = \dfrac{y_B}{2}$. On en déduit

$x_A + x = x_B$ et $y_A + y = y_B$ soit

$x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$ ce qui prouve que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont bien : $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A ; y_B - y_A\right)$.

Propriété : On considère le plan muni d'un repère (O; I; J). Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement leurs coordonnées dans le repère (O; I; J) sont égales.

Démonstration

On considère les deux points M et N du plan tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.

Par définition, les coordonnées de $\vec{u}$ dans (O ; I ; J) sont les coordonnées de M dans le même repère et les coordonnées de $\vec{v}$ sont les coordonnées de N.

On a : $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$

si et seulement si M = N

si et seulement si M et N ont les mêmes coordonnées dans le repère (O ; I ; J)

si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées dans le repère (O ; I ; J).

Exemple 3

Dans le plan muni d'un repère (O; I; J), on considère les points A (-3; -3), B (2 ; 1), C (3 ; 4) et D (-2 ; 0).

1. *Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.*
2. *Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?*

Réponses

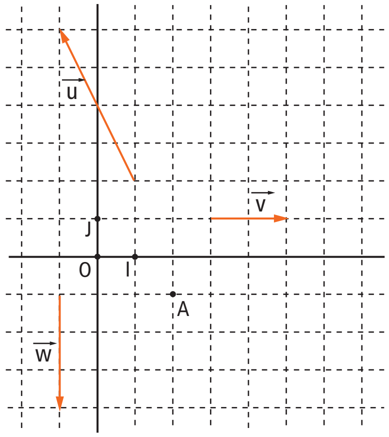
1. On a : $x_B - x_A = 2 - (-3) = 5$ et $y_B - y_A = 1 - (-3) = 4$. Ainsi : $\overrightarrow{AB}$ (5 ; 4).

   On a : $x_C - x_D = 3 - (-2) = 5$ et $y_C - y_D = 4 - 0 = 4$. Ainsi : $\overrightarrow{DC}$ (5 ; 4).

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées donc sont égaux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ainsi ABCD est un parallélogramme.

Exemple 4 ❶ *Lire, sans faire de calculs, les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.*

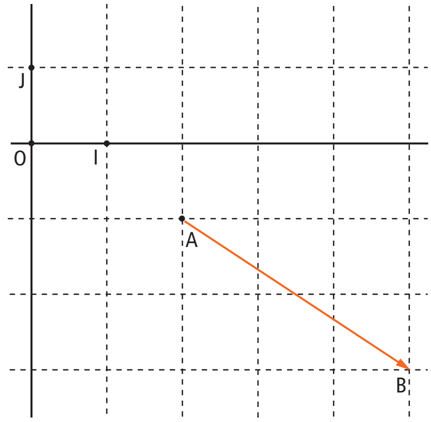
❷ *Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB}$ ait pour coordonnées (3 ; -2).*



Réponses

❶ On a : $\vec{u}(-2;4)$, $\vec{v}(2;0)$ et $\vec{w}(0;-3)$.

❷



❹ Somme de deux vecteurs

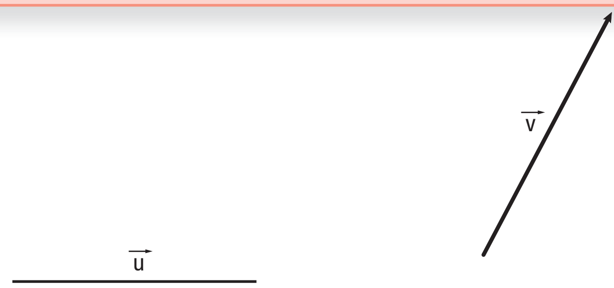
a) Définition

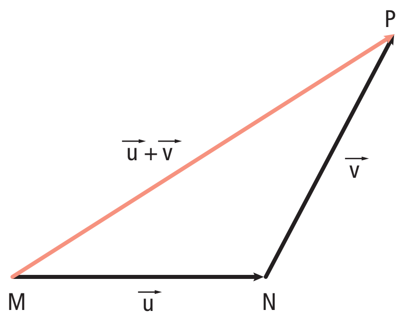
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et M un point du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ transforme M en un point que l'on note N.

La translation de vecteur $\vec{v}$ transforme N en un point que l'on note P. La translation qui transforme M en P est appelé translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Définition

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$. On note $\vec{u}+\vec{v}$ ce vecteur.





Remarque

La translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ et la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{v}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{u}$ définissent la même transformation. Autrement dit, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

b) Construction de la somme de deux vecteurs

Commentaire

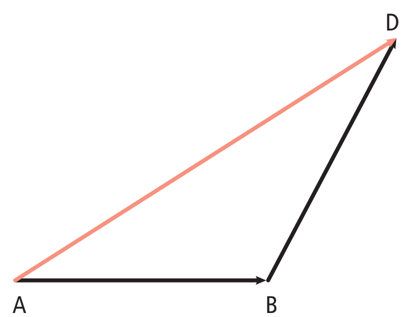
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on peut représenter le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ grâce à l'une des deux propriétés suivantes.

À savoir

Règle de Chasles

Soient A, B et D, trois points du plan.

On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.



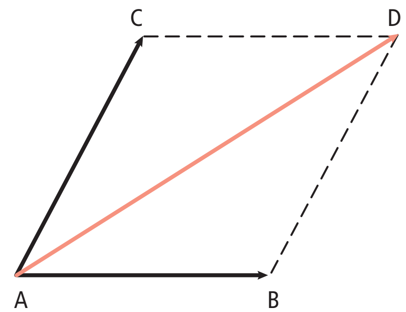
En effet, la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$ est la translation qui transforme A en D, c'est-à-dire la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

À savoir

Règle du parallélogramme

Soient A, B et C, trois points du plan.

Si ABDC est un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



En effet, si ABDC est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

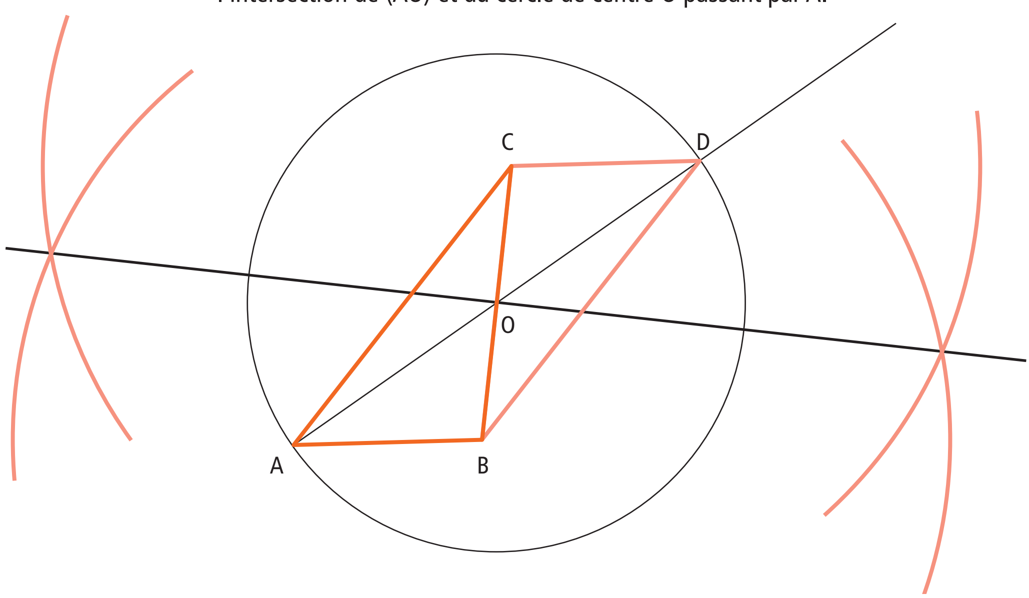
Exemple 5 *Sur la figure ci-contre, construire à la règle et au compas le point D tel que :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ *.*

Il faut construire D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Méthode 1

Notons O le milieu de [BC]. Alors D est l'image de A par la symétrie de centre O.

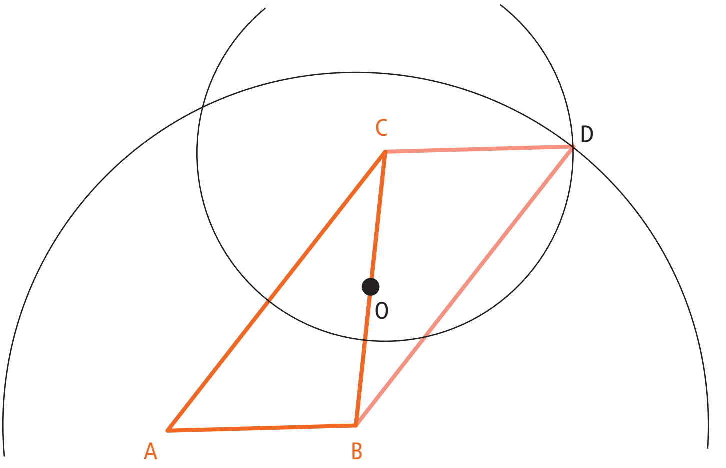
On construit la médiatrice de [BC] qui coupe [BC] en O puis le point D à l'intersection de (AO) et du cercle de centre O passant par A.



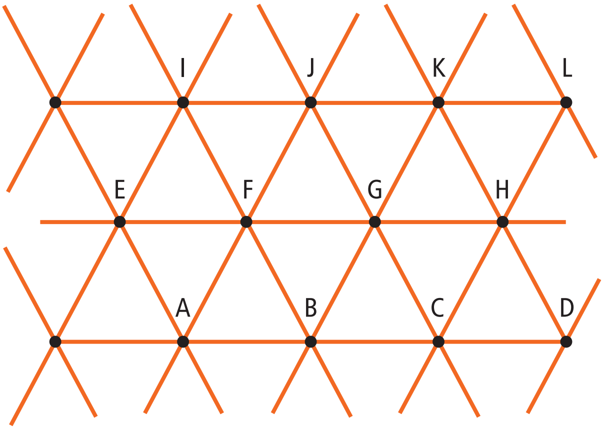
Méthode 2

On a : CD = AB et BD = AC.

On construit le point D à l'intersection du cercle de centre C et de rayon AB et du cercle de centre B de rayon AC.



Exemple 6 *On considère la figure ci-dessous constitué de triangles équilatéraux. Les points A, B,…, L sont des sommets des précédents triangles.*



Compléter.

❶ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{A...}$

❷ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{A...}$

❸ $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GE}=\vec{...}$

❹ $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{E...}$

❶ AFIE est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AI}$ (règle du parallélogramme).

❷ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{AK}$ (règle de Chasles)

❸ $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{EE}=\vec{0}$ (règle de Chasles)

❹ EAFI est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EI}$. On en déduit : $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EK}$.

c) Coordonnées du vecteur somme

Propriété : Soient $\vec{u}$ (a; b) et $\vec{v}$ (c; d) deux vecteurs. Les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont : $\vec{u}+\vec{v}$ ($a+c$; $b+d$).

Démonstration

Notons x et y les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$: $(x\,;\,y)$.

Notons M l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$ et N l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.
Le point N est donc l'image de O par l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.

Autrement dit, N est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. On a donc : $\overrightarrow{ON} = \vec{u}+\vec{v}$. Ainsi, les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont les coordonnées de N : N $(x\,;\,y)$.

De plus, on a : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ (M l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$) donc les coordonnées de M sont égales aux coordonnées de $\vec{u}$. Ainsi, M a pour coordonnées : M $(a\,;\,b)$.

On a, aussi : $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$ donc : $x-a = c$ et $y-b = d$. On en déduit : $x = a+c$ et $y = b+d$ ce qui prouve le résultat.

Exemple 7

Dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J), on considère A (5 ; 1) et B (2 ; 7). Déterminer les coordonnées du point C tel que OACB soit un parallélogramme.

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{OA}$ (5 ; 1).

Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{OB}$ (2 ; 7) donc le vecteur $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{OC}$ (7 ; 8). Le point C a donc pour coordonnées : C (7 ; 8).

d) Vecteurs opposés

Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique vecteur $\vec{v}$ tel que : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$. De plus, si dans un repère du plan, $\vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y) alors dans ce même repère, $\vec{v}$ a pour coordonnées ($-x$; $-y$).

Ce vecteur est appelé opposé de $\vec{u}$; on le note $-\vec{u}$.

Démonstration Soit $\vec{u}$ un vecteur. On considère un vecteur $\vec{v}$ quelconque.

On se place dans un repère (O ; I ; J). On note : $(x;\, y)$ et $(a;\, b)$ les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $(\vec{u}+\vec{v})$ a pour coordonnées $(x+a\,;\, y+b)$.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

On a donc $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ si et seulement si $\begin{cases} x+a=0 \text{ et} \\ y+b=0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} a=-x \text{ et} \\ b=-y \end{cases}$.

Ainsi, il existe un unique vecteur qui ajouté à $\vec{u}$ donne $\vec{0}$ et ce vecteur a pour coordonnées $\vec{v}\ (-x;\, -y)$.

Remarque

▶ On a, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$. Ainsi : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

e) Règles opératoires (1re partie)

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

b) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$;

c) $-(-\vec{u})=\vec{u}$

d) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{u}+\vec{w})$

Démonstration On se place dans un repère (O ; I ; J). Notons $\vec{u}\ (x;\, y)$, $\vec{v}\ (x'\,;\, y')$ et $\vec{w}\ (x''\,;\, y'')$ les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On démontre les égalités précédentes en utilisant le fait que si deux vecteurs ont les mêmes coordonnées alors ils sont égaux.

a) $(\vec{u}+\vec{v})\ (x+x'\,;\, y+y')$ et $(\vec{v}+\vec{u})\ (x'+x;\, y'+y)$

b) $(\vec{u}+\vec{0})\ (x+0\,;\, y+0)$ et $(\vec{0}+\vec{u})\ (0+x;\, 0+y)$ et $\vec{u}\ (x;\, y)$

c) $\left(-\left(-\vec{u}\right)\right)\left(-(-x);-(-y)\right)$ et $\vec{u}\ (x;\, y)$

d) $\left(\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}\right)\left(\left(x+x'\right)+x'';(y+y')+y''\right)$

et $\left(\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)\right)\left(x+\left(x'+x''\right);y+(y'+y'')\right)$.

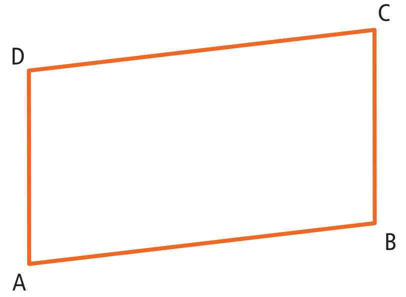
On observe alors aisément les égalités voulues.

Définition

On définit, pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Exemple 8 *Soit ABCD un parallélogramme. Simplifier les sommes suivantes.*

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$.
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$.



Chasles

1. On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

Chasles

2. On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Règle du parallélogramme

C Synthèse du cours

1 Translation et vecteurs

Définitions

- **Soient A et B deux points du plan.**

La translation qui transforme A en B est la transformation qui à un point M associe le point M' tel que [AM'] et [BM] aient le même milieu (si M est différent de A, cela revient à dire que ABM'M est un parallélogramme éventuellement aplati).

- **La translation qui transforme A en B est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.**

- **Soient A, B, C et D quatre points du plan.**

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
si et seulement si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu
si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Propriété

Si A, B et C sont 3 points du plan, il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$.

2 Coordonnées d'un vecteur

Définition

Soit $\vec{u}$ **un vecteur du plan. Les coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ **sont les coordonnées du point M tel que** $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Propriétés : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ **sont :** $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A ; y_B - y_A\right)$ **où** $A\left(x_A ; y_A\right)$ **et** $B\left(x_B ; y_B\right)$.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement leurs coordonnées dans un repère fixé sont égales.

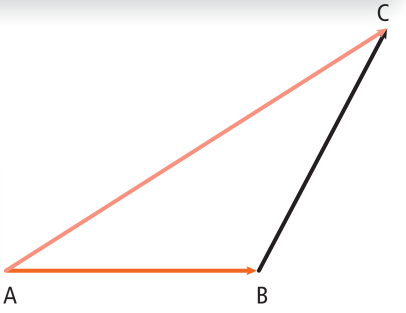
3 Somme de deux vecteurs

Définition

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur** $\vec{u}$ **suivie de la translation de vecteur** $\vec{v}$. **On note** $\vec{u} + \vec{v}$ **ce vecteur.**

Propriété : *Règle de Chasles*

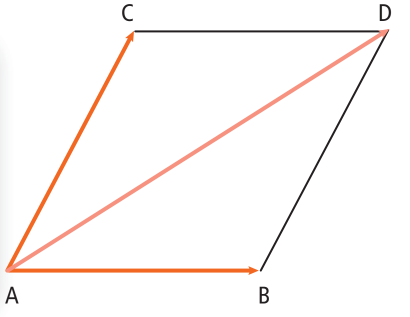
Soient A, B et C, trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Propriété : *Règle du parallélogramme*

Soient A, B et C, trois points du plan.

Si ABDC est un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



Propriétés

▶ **Soient $\vec{u}$ $(a ; b)$ et $\vec{v}$ $(a' ; b')$ deux vecteurs.**
Les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont : $\vec{u}+\vec{v}(a+a' ; b+b')$.

▶ **Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,**

a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

b) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$;

c) $-(\overrightarrow{-u})=\vec{u}$

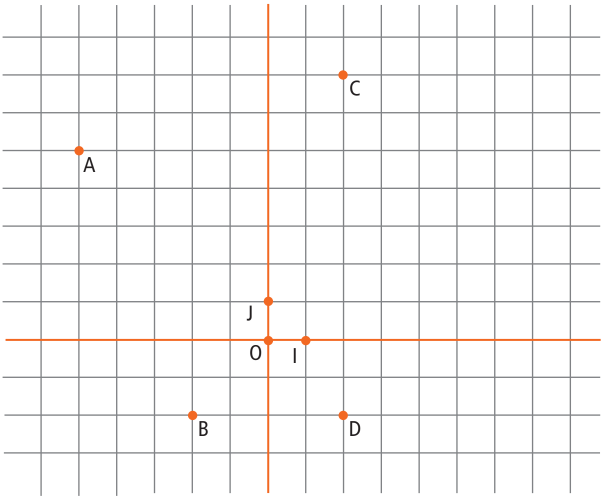
d) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

D Exercices d'apprentissage

Exercice 1

❶ Lire, sans calculs, les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.



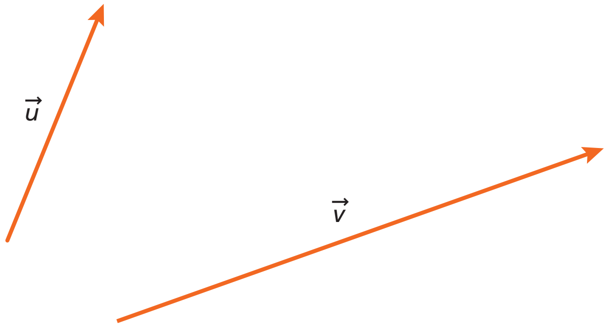
❷ Placer le point E tel que : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$.

❸ Placer le point F tel que : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$.

Que constate-t-on ?

Exercice 2

Représenter ci-dessous, le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.



Exercice 3

❶ Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

a) Si ABCD est un parallélogramme alors AB = DC.

b) Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

c) Si AC = BD alors ABCD est un rectangle.

d) Si ABCD est un losange alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

e) Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme.

f) Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et AC = BD alors ABCD est un rectangle.

g) Si AC $\neq$ BD alors ABCD n'est pas un rectangle.

❷ Écrire les propositions contraposées de a), e) et f). Sont-elles vraies ?

❸ Écrire les propositions réciproques de b), c), d) et g). Sont-elles vraies ?

Point de logique

Considérons une proposition du type : « Si P alors Q » où P et Q sont des affirmations pouvant être vraies ou fausses. Par exemple : « S'il pleut alors il y a des nuages ». Cette proposition est vraie !

(P: il pleut, Q: il y a des nuages)

▶ La **réciproque** de cette proposition est : « Si Q alors P ». Pour notre exemple : « S'il y a des nuages alors il pleut ». La météorologie nous prouve que cette dernière affirmation est fausse (autrement dit, il y a eu au moins une journée nuageuse mais sans pluie).

Ainsi, le fait de savoir si une proposition de la forme « Si P alors Q » est vraie ou fausse ne nous donne aucune information sur la véracité de la proposition réciproque.

Une proposition peut être vraie sans que sa réciproque ne le soit. Les deux propositions n'ont pas la même signification.

▶ La **contraposée** de la proposition « Si P alors Q » est : « Si contraire de Q alors contraire de P ». Pour notre exemple : « S'il n'y a pas de nuage alors il ne pleut pas ». Cette dernière affirmation est vraie et a la même signification que « s'il pleut alors il y a des nuages ».

Plus généralement, une proposition de la forme « Si P alors Q » est vraie si et seulement si sa proposition contraposée est vraie.

Il est parfois plus aisé pour démontrer une proposition, de démontrer sa contraposée.

Exercice 4

Soient ABCD un parallélogramme, I est le milieu de [CD] et A' le symétrique de A par rapport à I.

❶ Montrer que ACA'D est un parallélogramme.

❷ En déduire que C est le milieu de [A'B].

Exercice 5 Les quadrilatères ABCD et ABEF sont des parallélogrammes. Montrer que CDFE est un parallélogramme.

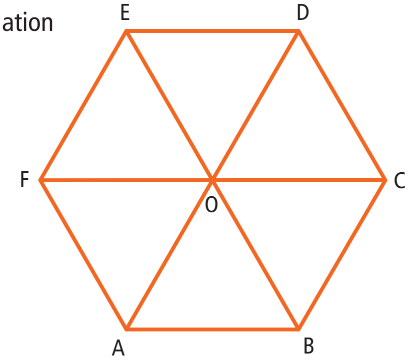
Exercice 6 Soient ABCD et AECF deux parallélogrammes. Montrer que BFDE est un parallélogramme.

Exercice 7 Soient O, A, B trois points du plan. On note, de plus, A′ et B′ les symétriques respectifs de A et B par rapport à O. Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$.

Exercice 8 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On considère A (-4 ; 2), B (2 ; 1) et C (0 ; 3). Déterminer les coordonnées de D image de C par la translation qui transforme A en B.

Exercice 9 ABCDEF est un hexagone régulier (côtés et angles égaux) de centre O. On admet que OABC, OBCD, OCDE, ODEF et OEFA sont des parallélogrammes.

1. Déterminer l'image de O par la translation
   - a) qui transforme F en E.
   - b) de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer l'image de F par la translation
   - a) qui transforme A en C.
   - b) de vecteur $\overrightarrow{EC}$.



Exercice 10 Soient ABCD un parallélogramme, I le milieu de [AB]. L'image de C et D par la symétrie de centre I sont notés C′ et D′ respectivement. Montrer que ABD′C′ est un parallélogramme.

Exercice 11 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On considère A (-6 ;-3), B (1 ;-1), C (2 ; 4) et D (-5 ; 2). Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice 12 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On considère A (-6 ; 1), B (-3 ;-1) et C (2 ; 1). Déterminer les coordonnées de D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Exercice 13 Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Montrer que :

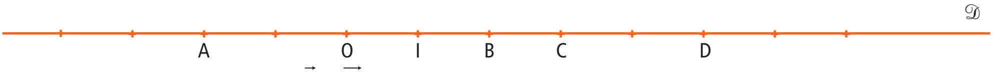
1. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
3. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$

3 Colinéarité, applications du calcul vectoriel

A Activités

1 Repérage sur une droite et vecteurs

On se place sur une droite $\mathscr{D}$ munie d'un repère (O ; I). On considère les points A, B, C et D d'abscisses respectives : -2, 2, 3 et 5.



On note : $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$.

On a : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IB}$ (car I est le milieu de [OB]). On a donc

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} = \vec{u} + \vec{u}$. On note : $\overrightarrow{OB} = 2\vec{u}$.

On définit, de même : $3\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $(-2)\vec{u} = (-\vec{u}) + (-\vec{u})$, …

1. Exprimer en fonction de $\vec{u}$, les vecteurs $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OA}$. Faire le lien avec les abscisses des points A, C et D.

2. Construire un point J tel que : $2\overrightarrow{OJ} = 3\vec{u} (= \overrightarrow{OC})$. Donner l'abscisse de J. On note : $\overrightarrow{OJ} = \frac{3}{2}\vec{u}$.

Commentaire Nous généraliserons ce qui précède et nous définirons pour tout réel x, le vecteur $x.\overrightarrow{OI}$ par l'égalité : $x.\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM}$ où M est le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ munie du repère (O ; I).

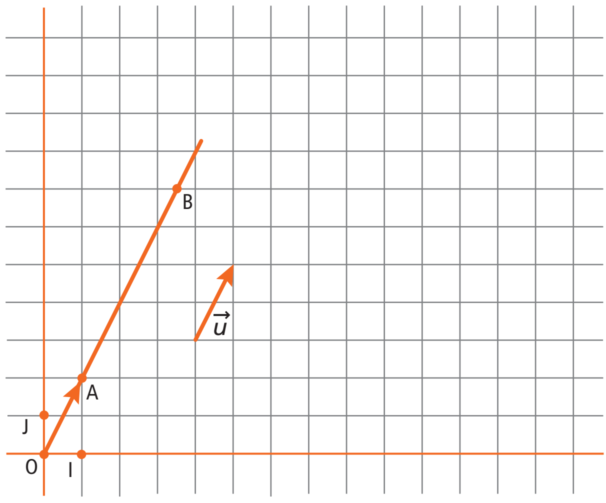
2 Coordonnées du produit d'un réel par un vecteur

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On considère un vecteur non nul $\vec{u}$ (1 ; 2).

On veut définir et déterminer les coordonnées de $\frac{7}{2}\vec{u}$.

On considère le point A du plan tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

On définit le point B d'abscisse $\frac{7}{2}$ sur la droite (OA) munie du repère (O ; A). On a alors, d'après l'activité précédente : $\overrightarrow{OB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{7}{2}\vec{u}.$



❶ Déterminer les coordonnées de B dans le repère (O ; I ; J).

❷ En déduire les coordonnées de $\frac{7}{2}\vec{u}$ dans le repère (O ; I ; J). Faire le lien avec les coordonnées de $\vec{u}$.

B Cours

❶ Produit d'un vecteur par un réel

a) Définition

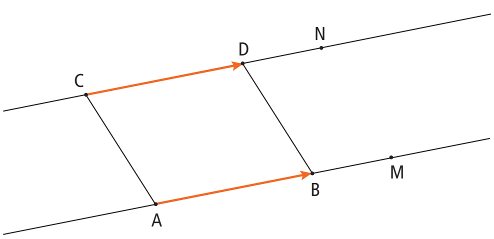
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel.

Soient A, B, C et D tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$.

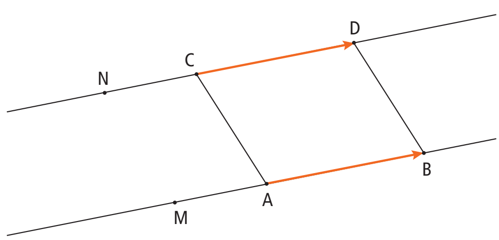
On note M le point d'abscisse k de la droite (AB) munie du repère (A ; B) et N le point d'abscisse k de la droite (CD) munie du repère (C ; D).

On admet que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN}$

Cette propriété justifie la définition suivante.



$k > 0$



$k < 0$

Définition

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un réel.

- **Si $\vec{u} \neq \vec{0}$. Considérons deux points A et B tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Alors $k.\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$ où M est le point d'abscisse k de la droite (AB) munie du repère (A ; B).**
- **Si $\vec{u} = \vec{0}$, on définit : $k.\vec{u} = \vec{0}$.**

Remarque

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k = 0$, on obtient : $k.\vec{u} = \vec{0}$.

On se place dans un repère quelconque (O, I, J) (pas forcément orthonormé).

Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. On suppose que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$ dans un repère du plan.

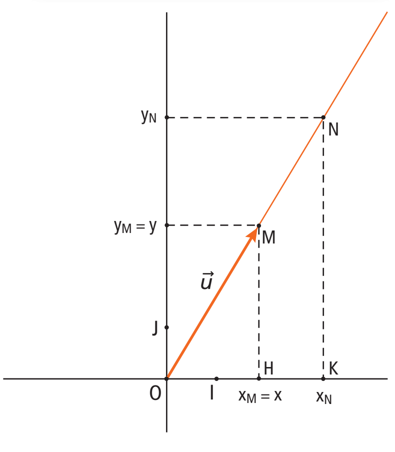
Alors $k.\vec{u}$ a pour coordonnées : $(k \times x ; k \times y)$ dans ce même repère.

Démonstration On démontre la propriété dans le cas où : $k > 0$ et $x, y > 0$

On considère M et N tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $k.\vec{u} = \overrightarrow{ON}$. (On suppose M$\neq$O)

On munit la droite (OM) du repère (O ; M)

Alors dans ce repère de la droite, M a pour abscisse $m = 1$ et N a pour abscisse $n = k$. Donc : $\dfrac{ON}{OM} = \dfrac{n \text{ unité}}{m \text{ unité}} = \dfrac{n}{m} = \dfrac{k}{1} = k$.



(A ne pas confondre avec les coordonnées $(x_M ; y_M)$ et $(x_N ; y_N)$ de M et N dans le repère du plan).

D'après le théorème de Thalès dans le triangle OKN (H et K étant définis comme ci-contre), on a

$$\frac{x_N}{x_M} = \frac{OK}{OH} = \frac{ON}{OM} = k.$$

Ainsi : $x_N = k \times x_M = k \times x$.

De même : $y_N = k \times y$.

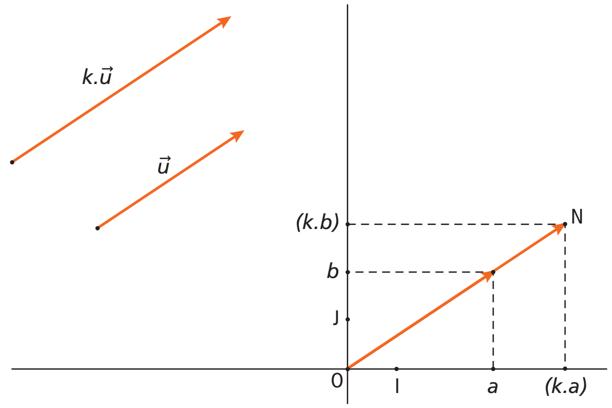
On en déduit que les coordonnées de N et donc les coordonnées de $k.\vec{u} = \overrightarrow{ON}$ sont bien : $(k \times x ; k \times y)$ dans le repère du plan considéré.

Remarque

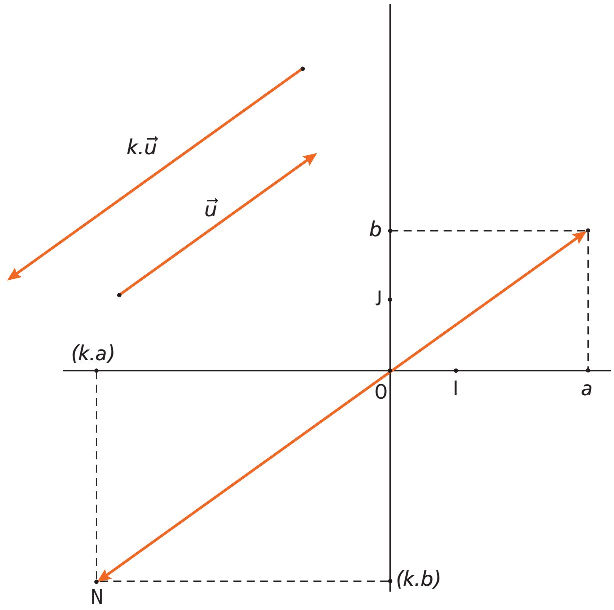
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $k.\vec{u}$ sont proportionnelles quel que soit le repère du plan considéré.
- On déduit de la précédente propriété que si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $k.\vec{u}$ ont la même direction.

  On en déduit, de plus, que

  – si $k > 0$ alors les deux vecteurs sont de même sens ;
  – si $k < 0$ alors les deux vecteurs sont de sens contraires.



$k > 0$



$k < 0$

b) Règles opératoires (2e partie)

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et tous réels k, k'

a) $k.(\vec{u}+\vec{v}) = k.\vec{u} + k.\vec{v}$; b) $(k+k').\vec{u} = k.\vec{u} + k'.\vec{u}$

c) $k.\left(k'.\vec{u}\right)=(kk').\vec{u}$

Démonstration

On se place dans un repère (O ; I ; J). Notons $\vec{u}$ $(x; y)$ et $\vec{v}$ $(x'; y')$ les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On démontre les égalités précédentes en utilisant le fait que si deux vecteurs ont les mêmes coordonnées alors ils sont égaux.

a) $\left(k.\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\right)\left(k\times(x+x');k\times(y+y')\right)$

et $\left(k.\vec{u}+k.\vec{v}\right)\left(k\times x+k\times x';k\times y+k\times y'\right)$

b) $\left((k+k').\vec{u}\right)\left((k+k')\times x;(k+k')\times y\right)$

et $\left(k.\vec{u}+k'.\vec{u}\right)\left(k\times x+k'\times x;k\times y+k'\times y\right)$

c) $\left(k.\left(k'.\vec{u}\right)\right)\left(k\times\left(k'\times x\right);k\times\left(k'\times y\right)\right)$ et $\left((kk').\vec{u}\right)\left((kk')\times x;(kk')\times y\right)$.

On observe alors aisément les égalités voulues.

Commentaire

- Comme pour les calculs dans $\mathbb{R}$, la multiplication (d'un vecteur) par un réel sera prioritaire sur l'addition (de deux vecteurs).

Par exemple, $3\vec{u}+\vec{v}$ désignera $\left(3.\vec{u}\right)+\vec{v}$.

- On peut ajouter deux vecteurs, multiplier un vecteur par un réel mais on ne peut pas multiplier deux vecteurs ou ajouter un réel à un vecteur.

Exemple 9

Dans le plan muni d'un repère (O; I; J), On considère les vecteurs $\vec{u}(3;2)$ et $\vec{v}(4;-6)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $3\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$ et $4\vec{u}-3\vec{v}$.

On a : $\left(3\vec{u}\right)(3\times 3;3\times 2)$ soit $\left(3\vec{u}\right)(9\,;6)$. De même : $\left(\frac{1}{2}\vec{v}\right)(2;-3)$ et $\left(4\vec{u}-3\vec{v}\right)(0;26)$.

Exemple 10

Dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J), On considère les vecteurs A (-1 ; 2) et B (-4 ; 3). Déterminer les coordonnées du point C tel que : $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (-4- (-1) ; 3-2) soit (-3 ; 1).

Le vecteur $-3\,\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées : (9 ; -3).

Notons $(x; y)$ les coordonnées de C.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont donc : $(x-(-1) ; y-2)$ soit $(x+1 ; y-2)$.

Les vecteurs $-3\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux. Leurs coordonnées sont donc égales. Ainsi

$\begin{cases} x+1=9 \\ y-2=-3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=9-1 \\ y=-3+2 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x=8 \\ y=-1 \end{cases}$. Les coordonnées de C sont donc : (8 ; -1).

2 Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si il existe un réel *k* tel que : $\vec{u} = k\,.\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,.\,\vec{u}$.

Remarque

On a : $0.\vec{u} = \vec{0}$, on peut donc en déduire que le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan différents du vecteur nul.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Démonstration

On a montré que deux vecteurs non nuls colinéaires (donc du type $\vec{u}$ et $k\,.\,\vec{u}$) ont la même direction.

Il reste à démontrer la réciproque : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction alors ils sont colinéaires.

Démontrons ce 2^{e} point. On suppose donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

Considérons les points M et N tels que tels que : $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$.

Les points O, M et N sont alignés puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

Puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous deux différents du vecteur nul, M et N sont tous deux différents de O. On munit la droite (OM) du repère (O ; M). On note k l'abscisse de N.

On a donc par définition $\overrightarrow{ON}=k\times\overrightarrow{OM}$.

Ainsi : $\vec{v} = k \times \vec{u}$ ce qui prouve que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Conséquence Les vecteurs $\vec{u}$ $(a;\ b)$ et $\vec{v}$ $(c;\ d)$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Application

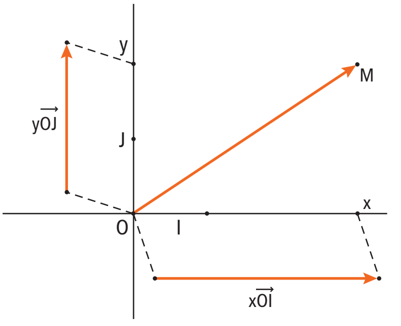
Pour montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ $(a;\ b)$ et $\vec{v}$ $(c;\ d)$ sont colinéaires, on peut montrer que $a \times d = b \times c$ ou identifier le coefficient de proportionnalité.

On utilise le tableau de proportionnalité :

$\vec{u}$	a	b
$\vec{v}$	c	d

Remarque

Considérons un repère du plan (O ; I ; J). Soient M un point du plan, x et y deux réels. Le point M a pour coordonnées $(x;\ y)$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$



❸ Applications à l'alignement, au parallélisme

a) Parallélisme

Propriété 1 : Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Démonstration En effet, dire que (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction ce qui est équivalent à la colinéarité de ces vecteurs.

Exemple 11 *Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points A (1,5 ; 4), B (4,5 ; 5), C (5 ; 1,5) et D (0,5 ; 0).*

1. *Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.*
2. *Que peut-on en déduire ?*

1. On a : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ soit $\overrightarrow{AB}(4,5-1,5;5-4)$ ou encore $\overrightarrow{AB}(3;1)$.
   On a : $\overrightarrow{DC}(5-0,5;1,5-0)$ soit $\overrightarrow{DC}(4,5;1,5)$.
2. On a : $3\times 1,5 = 1\times 4,5$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires. On en déduit : (AB)//(DC).

b) Alignement

Propriété 1 : Soient A, B et C trois points distincts du plan. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration En effet, dire que A, B et C sont alignés revient à dire que les droites (AB) et (AC) sont parallèles.
Ce qui est équivalent à la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exemple 12 *Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points A (-1 ; 2), B $\left(\frac{1}{3};4\right)$ et C (1 ; 5).*

Montrer que A, B et C sont alignés.

On a : $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{3}-(-1);4-2\right)$ soit $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{3}+1;2\right)$ ou encore $\overrightarrow{AB}\left(\frac{4}{3};2\right)$.

On a : $\overrightarrow{AC}\left(1-(-1);5-2\right)$ soit $\overrightarrow{AB}\left(2;3\right)$.

On a : $\frac{4}{3}\times 3 = 2\times 2$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{aC}$ sont colinéaires. On en déduit que les points A, B et C sont alignés.

4 Milieu, centre de gravité

Propriété : Soient A et B deux points du plan.

M est le milieu de [AB] si et seulement si : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

si et seulement si $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

Démonstration On sait que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ si et seulement si M est le milieu de [AB] (chapitre 2).

De plus, on a : $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}$.

On en déduit le 2^e point : M est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$.

Montrons le 1er point.

M est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

si et seulement si $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$

si et seulement si $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$

si et seulement si $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Théorème

Soient ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] et G le centre de gravité du triangle ABC. On a :

a) $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA'}$.

b) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

c) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Démonstration Voir exercices d'approfondissement XII et XIII.

C Synthèse du cours

1 Produit d'un vecteur par un réel

Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. On suppose que $\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}$ (x; y) dans un repère. Alors $k.\vec{u}$ a pour coordonnées : $(k\times x;k\times y)$ dans ce même repère.

Remarque

- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $k\neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $k.\vec{u}$ ont la même direction.
- si $k>0$ alors les deux vecteurs $\vec{u}$ et $k.\vec{u}$ sont de même sens ;
- si $k<0$ alors les deux vecteurs $\vec{u}$ et $k.\vec{u}$ sont de sens contraires.

2 Colinéarité de deux vecteurs

Définition : **Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si il existe un réel k tel que : $\vec{u} = k.\vec{v}$ ou $\vec{v} = k.\vec{u}$.**

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan non nuls.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

3 Applications

Propriété : **Soient A et B deux points du plan.**

M est le milieu de [AB] si et seulement si : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

si et seulement si $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

Théorème

Soient ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] et G le centre de gravité du triangle ABC. Alors

a) $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$.

b) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

c) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

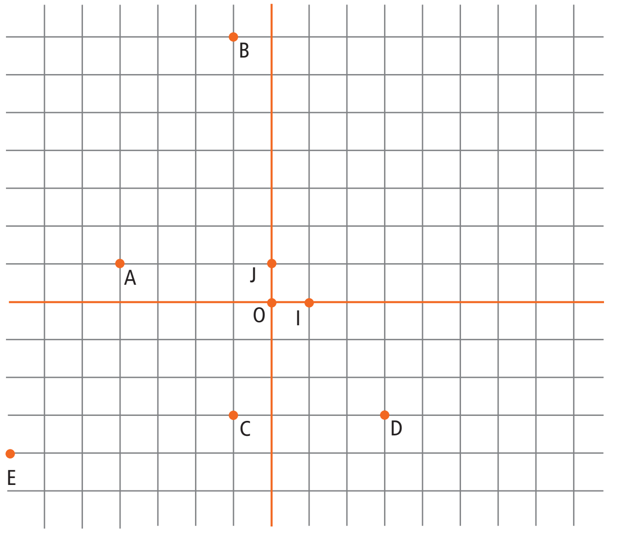
D Exercices d'apprentissage

Exercice 14 Les points A, B, C, D et E sont cinq points d'une droite $\mathscr{D}$ placés comme il est indiqué sur la figure ci-dessous.

Compléter par des réels, les égalités vectorielles suivantes.

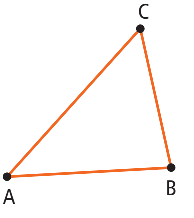
1. $\overrightarrow{AB} = ...\overrightarrow{DE}$
2. $\overrightarrow{AB} = ...\overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{AB} = ...\overrightarrow{BC}$
4. $\overrightarrow{DE} = ...\overrightarrow{CB}$
5. $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = ...\overrightarrow{CD}$
6. $2\overrightarrow{BC} + ...\overrightarrow{DE} = \vec{0}$

Exercice 15 Sur la figure ci-dessous, placer le point F tel que : $\overrightarrow{EF} = (\frac{2}{3})\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$.



Exercice 16 Reproduire la figure ci-contre, et construire E, F, G et H tels que

$\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = -2\overrightarrow{BC}$.



Exercice 17 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On définit les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ par

$\vec{a} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, $\vec{b} = \vec{u} - 3\vec{v}$ et $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{u} - \vec{v}$. Trouver des réels x et y tels que : $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Exercice 18 Déterminer dans chaque cas si les vecteurs sont colinéaires ou non. Le cas échéant, donner une relation de colinéarité liant les deux vecteurs.

1. $\vec{u}(8;13)$ et $\vec{v}(5;8)$
2. $\vec{u}(-4;6)$ et $\vec{v}(20;30)$
3. $\vec{u}(-4;6)$ et $\vec{v}(18;-27)$
4. $\vec{u}(0,4;0,6)$ et $\vec{v}(1,4;1,6)$
5. $\vec{u}(0;6)$ et $\vec{v}(2;0)$
6. $\vec{u}\left(\frac{1}{2};6\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{3};4\right)$.

Exercice 19 On se place dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points A (-2, 1 ; 3,2), B (-0,9 ; 4), C (3,7 ; 7) et D (5,8 ; 8,4). Montrer que : (AB)//(CD).

Exercice 20 On se place dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J). Dans chacun des cas suivants, les points A, B et C sont-ils alignés ?

1. A (-2 ; -3), B (3 ; 5), C (6 ; 10).
2. A (-3 ; -2), B (1 ; 4), C (3 ; 7).
3. A (0 ; -1), B (3 ; 3), C (9 ; 11).

Exercice 21 On rappelle que si G est le centre de gravité du triangle ABC alors : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
On se place dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J).
Soient A (-2 ; -3), B (3 ; -1) et C (2 ; 7). Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Exercice 22 Soient ABCD un parallélogramme (non aplati), P et Q tels que $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. On se place dans le repère (A ; B ; D).

1. Donner les coordonnées de A, B, C, D, P et Q dans le précédent repère.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$
3. Montrer que les points C, P,et Q sont alignés.

4 Synthèse de la séquence

1 Translation et vecteurs

Définitions

- La translation qui transforme A en B est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Soient A, B, C et D quatre points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

2 Coordonnées d'un vecteur

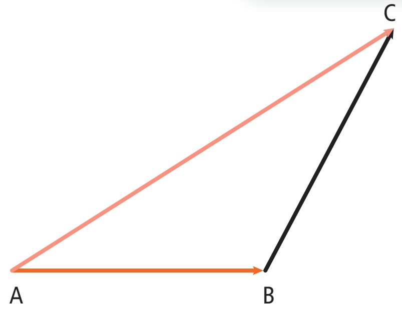
Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que
$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Propriétés : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A ; y_B - y_A\right) \text{ où } A\left(x_A ; y_A\right) \text{ et } B\left(x_B ; y_B\right)$$

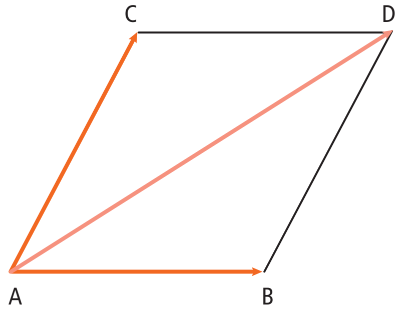
Soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(c;d)$ deux vecteurs et k un réel. Les coordonnées de
a) $\vec{u}+\vec{v}$ sont $(a+c ; b+d)$ b) $k.\vec{u}$ sont $(ka ; kb)$.



3 Construction de la somme de deux vecteurs

Propriétés : ***Règle de Chasles***

Soient A, B et C, trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Règle du parallélogramme

Soient A, B et C, trois points du plan.

Si ABDC est un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

4 Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si il existe un réel k tel que : $\vec{u} = \boldsymbol{k}.\vec{v}$ **ou** $\vec{v} = \boldsymbol{k}.\vec{u}$ **.**

Théorème : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan différents du vecteur nul.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(c;d)$ sont colinéaires si et seulement si : $ad = bc$.

5 Exercices d'approfondissement

Exercice I Soient ABCD un parallélogramme de centre O et I le milieu de [AD]. Entourer les bonnes réponses. Justifier.

1. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=$

   a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\vec{0}$ c) $\overrightarrow{BD}$ d) $2\overrightarrow{OI}$

2. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=$

   a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\vec{0}$ c) $\overrightarrow{BD}$ d) $2\overrightarrow{OI}$

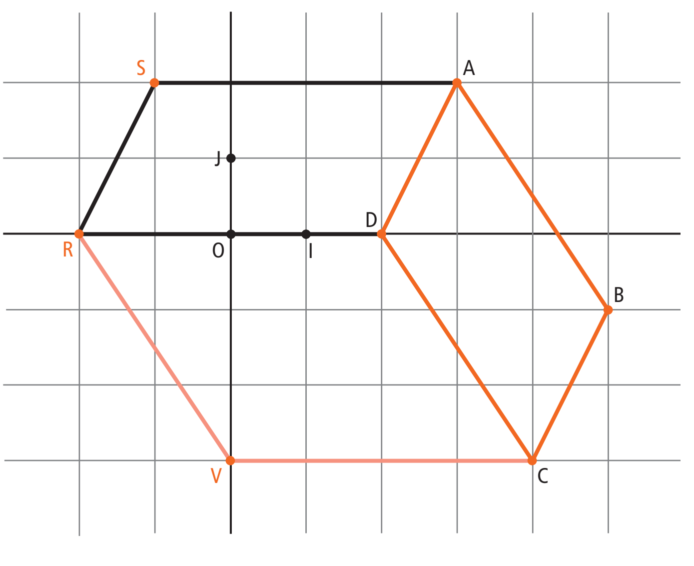
3. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=$

   a) $\overrightarrow{DA}$ b) $\vec{0}$ c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ d) $2\overrightarrow{OI}$

4. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$

   a) $\overrightarrow{DA}$ b) $\vec{0}$ c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ d) $2\overrightarrow{OI}$

Exercice II On considère la figure ci-dessous. Compléter les égalités suivantes.



1. $\overrightarrow{RV}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{D?}.$
2. $\overrightarrow{DV}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D?}.$
3. $\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{D?}.$
4. $\overrightarrow{BR}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DR}=?\overrightarrow{VC}.$
5. $\overrightarrow{AS}=-2\overrightarrow{R?}.$
6. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{?C.}=\overrightarrow{SD}.$
7. $\overrightarrow{R?}-\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{DB}.$
8. $\overrightarrow{?_1?_2}-\overrightarrow{VR}=2\overrightarrow{OI}.$

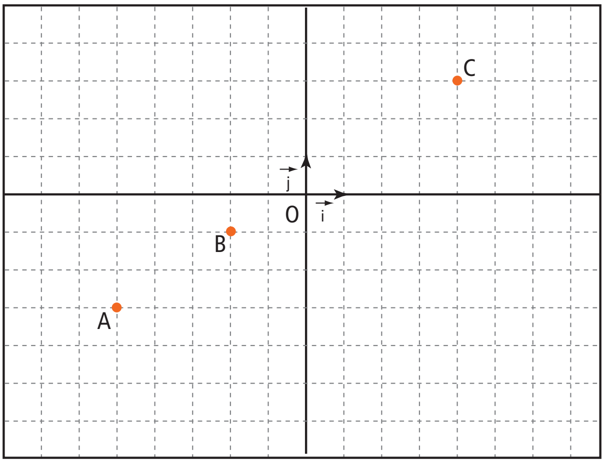
Exercice III Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points A(–1 ; 1), B(1 ; 2), C (3 ; 2) et D (1 ; 3).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. Déterminer les coordonnées du point E défini par : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

3. Montrer que les points A, B et E sont alignés.

Exercice IV Dans le repère (O ; I ; J) on donne les points A(–5 ; –3), B(–2 ; –1) et C (4 ; 3).



1. Montrer que les points A, B, C sont alignés.

2. La droite (AB) passe-t-elle par le point O ?

3. Un point D de (AB) a pour abscisse 3. Quelle est son ordonnée ?

4. Un point E de (AB) a ses deux coordonnés égales. Quelles sont ses coordonnées ?

Exercice V Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). On considère les points A(0 ; 3), B(4 ; 1), C(8 ; 9) et D(4 ; 11).

1. Montrer que ABCD est un parallélogramme.

2. Calculer les longueurs AC et BD de ses diagonales. Qu'en déduire ?

3. Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

Exercice VI Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points A(–1 ; –1), B(4 ; 2), C(6 ; 6), D(1 ; 4) et E(3 ; 9). De plus, F est le milieu de [AB] et G vérifie : $\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

1. Montrer que D est le milieu de [AE].

2. Déterminer les coordonnées de F.

3. Déterminer les coordonnées de G.

4. Montrer que les droites ((BE) et (DF) sont parallèles.

Exercice VII

Soient ABC un triangle, $\mathscr{D}_1$ est la parallèle à (BC) passant par A, $\mathscr{D}_2$ la parallèle à (AC) passant par B et $\mathscr{D}_3$ la parallèle à (AB) passant par C.

On définit de plus,

A' $=\mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_3$ (donc A' est l'intersection des droites $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$),

$B' = \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_3$ et $C' = \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère BCB'A ?
2. Montrer que A est le milieu de [B'C'].

On montre alors, de même, que B est le milieu de [A'C'] et C le milieu de [A'B'].

Exercice VIII

Soit ABC un triangle (non aplati). Les points M, N, P sont définis par

- $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
- N est le milieu de [AC].
- P est le symétrique de B par la symétrie de centre C.

1. Faire la figure.
2. Montrer que : $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

   On se place dans le repère (A ; B ; C).
3. Donner les coordonnées des points A, B et C.
4. Déterminer les coordonnées des points M, N et P.
5. Montrer que M, N et P sont alignés.

Exercice IX

Soient ABC un triangle (non aplati), M et N les points définis par : $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On se propose de démontrer de deux façons différentes que A, M et N sont alignés.

1. *Avec un repère*

On se place dans le repère (A, B, C).

a) Déterminer les coordonnées de A, B, C et N.

b) Déterminer les coordonnées du point M.

c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$.

d) Conclure.

2. *Calculs vectoriels*

a) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. Conclure.

Exercice X Soient ABC un triangle, M et N définis par : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{BC}$. Montrer que A, C et N sont alignés.

Exercice XI Soient A, B deux points du plan et I le milieu de [AB]. Montrer que pour tout point M du plan

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Exercice XII Soient ABC un triangle et M un point tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Soit I le milieu de [AB]. Montrer que M est le milieu de [IC].

Exercice XIII Reprenons le théorème du cours

Soient ABC un triangle, A ′, B ′ et C ′ les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] et G le centre de gravité du triangle ABC. On veut

a) retrouver le fait que les médianes d'un triangle sont bien concourrantes.

b) montrer que : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$.

c) montrer que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

d) montrer que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

On considère que G est l'intersection des médianes (AA′) et (BB′) et on note G ′ le point tel que : $\overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}$.

1. Montrer que A ′ est le milieu de [GG ′].
2. a) Montrer que G est le milieu de [AG ′].
   b) Montrer que la médiane (CC′) passe aussi par G.
3. En déduire que : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ puis que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
4. Montrer, alors, que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

   La réciproque est aussi vraie. Voir Exercice XIV

Exercice XIV Soient ABC un triangle. Montrer que le centre de gravité G du triangle ABC est le seul point tel que :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.